2.5. Определяне на земното ускорение с обръщаемо махало

Кратко теоретично въведение

Математичното махало представлява материална точка с маса m , окачена на тънка, неразтеглива, безтегловна нишка с дължина **l** (фиг.1). Отклонено от равновесното си положение на малък ъгъл φ (два три градуса) математическото махало извършва хармонични трептения с период

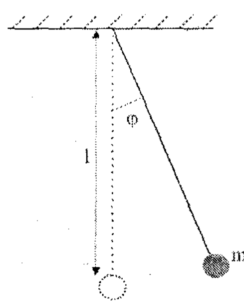
$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{g}}} \qquad (1)$$

Всяко твърдо тяло, което може да се люлее около неподвижна хоризонтална ос, неминаваща през центъра на тежестта (центъра на инерцията), се нарича физично махало (фиг.2). При отклонение от равновесното положение на малък ъгъл, махалото извършва хармонични трептения с период

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{mag}}} \qquad (2)$$

I - инерчният момент на тялото спрямо хоризонталната ос, минаваща през точката **O; m** - маса на махалото; **g** - земното ускорение; **a** - разстоянието между оста на окачването и центъра на тежестта - C

Ако се сравнят формули (1) и (2), ще се види, че на всяко физично махало



Фиг. 1

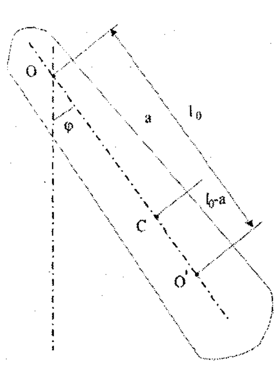
съответствува математично махало с един и същ период и дължина, която се определя от зависимостта

$$(3) \qquad l_0 = \frac{I}{m\,a}$$

Тази дължина се нарича редуцирана (приведена) дължина на физичното махало. Периодът на физичното махало може да се изрази чрез редуцираната дължина l_0, т.е.

$$(4) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

Ако се нанесе редуцираната дължина l_0 от точката на окачването **O** по направление на правата ОС ще се получи точка **O'**, която се нарича център на люлеене (фиг.2). Ако се " обърне " махалото и се окачи в центъра на люлеене **O'**, неговият период остава същия. Това твърдение се доказва по следния начин. Съгласно теоремата на Щайнер инерчният момент на махалото се представя във вида



Фиг. 2

$$(5) \qquad I = I_c + m\,a^2$$

I_c е инерчният момент спрямо ос, минаваща през центъра на тежестта - **C**, успоредна на хоризонталната ос на въртене в точка **O**. Заместването на (5) в (3) дава

$$(6) \qquad l_0 = \frac{I_c}{ma} + a$$

Махалото се окачва в центъра на люлеене **O'**. В съответствие с (6) редуцираната дължина в този случай ще бъде

(7)

$$l_0' = \frac{I_c}{m\left(l_0 - a\right)} + \left(l_0 - a\right)$$

Последното уравнение може да се преобразува

$$(8) \qquad l_0' = l_0 + \frac{1}{m\left(l_0 - a\right)}\left[I_c + m\,a^2 - m\,l_0 a\right]$$

Тъй като, съгласно (5)

$$I = I_c + m\,a^2,$$

а от друга страна, от (3)

$$I = m\,l_0 a\ ,$$

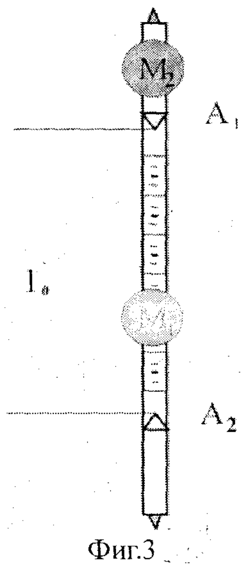
то следва, че изразът в средните скоби на (8) е нула. Тогава

$$l_0' = l_0$$

т.е. двете приведени дължини на махалото при окачването му в точка О и О' са равни, следователно и периодите съгласно (4) ще са равни.

Съществуването на две точки във всяко физично махало, при окачването, в които, махалото има един и същ период и една и съща редуцирана дължина, се използва за определяне на земното ускорение g с обръщаемо (реверсионно) махало.

Опитна постановка



Фиг.3

Реверсионното махало представлява лек метален прът, към който са закрепени две успоредни една на друга призми $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, острите ръбове на които са обърнати един към друг (фиг.3). Тези ръбове са осите около които се люлее махалото.

На махалото са монтирани две лещообразни тежести $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$, които могат да се местят и фиксират на различни места по носещия метален прът. Едната от тежестите $\mathbf{M_1}$ се мести между призмите $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$. Тя се нарича вътрешна. Другата тежест $\mathbf{M_2}$ се мести от външната страна на едната призма и се нарича външна. С преместването на тежестите се измества и центъра на тежестта, т.е. изменя се периодът на люлеене на махалото. Определя се такова положение на тежестите, при което махалото става обръщаемо, т.е. при окачване на призмите $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ периодите на люлеене стават едни и същи. В този случай ръбовете на призмите $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ стават съответно център на люлеене и точка на окачване, а разстоянието между тях е равно на редуцираната дължина на махалото $\mathbf{l_0}$. Тогава периодът на реверсионното махало се определя по формула (4), а от нея може да се определи земното ускорение $\mathbf{g}$

(9) $$\mathbf{g} = 4\pi^2 \frac{\mathbf{l_0}}{\mathbf{T}^2}$$

$\mathbf{l_0}$ - разстоянието между ръбовете на двете призми

$\mathbf{T}$ - периода на обръщаемото махало, който се определя опитно

Както се вижда от (9) земното ускорение се определя твърде просто с измерването на две величини: едно фиксирано разстояние $\mathbf{l_0}$ и периодът $\mathbf{T}$ на реверсионното махало, който може да се измери с голяма точност. Изключено е трудното измерване на инерчния момент $\mathbf{I}$ и величината $\mathbf{a}$.

Задачи и начин на изпълнение

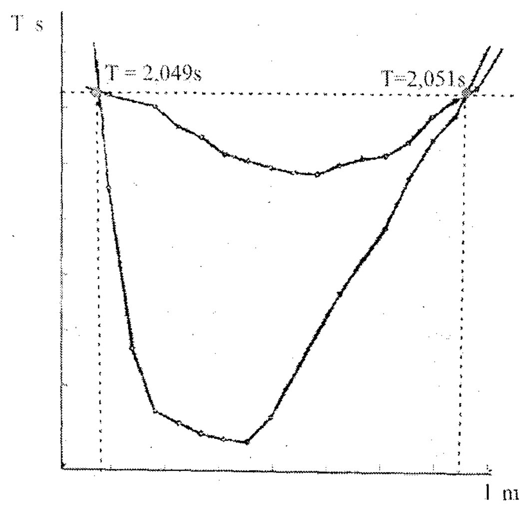
1. Определяне на земното ускорение

Определянето на земното ускорение - $\mathbf{g}$ от формула (9) се извършва по следния начин:

Окачва се махалото примерно на призмата $\mathbf{A_1}$. Външната тежест $\mathbf{M_2}$ се фиксира и остава неподвижна през цялото време на измерването. Последователно се премества тежестта $\mathbf{M_1}$ през **0.10 m** по скалата на махалото, като при всяко положение на $\mathbf{M_1}$ се измерва периодът $\mathbf{T_1}$ на люлеене. За по- точното определяне на този период се измерва времето $\mathbf{t}$ за определен брой люлеения - например 10. Периодът $\mathbf{T_1}$ е

$$T_1 = \frac{t}{10}$$

Това измерване може да се направи автоматично с електронен хронометър. Данните за измерените периоди и съответните положения на вътрешната тежест се нанасят в таблица.След това махалото се окачва на призмата $\mathbf{A_2}$ и по същия начин се определя периодите $\mathbf{T_2}$. Получените резултати се записват в таблицата. Зависимостта на периодите $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ от положението на на тежестта $\mathbf{M_1}$ по скалата се представят графично както е показано на фиг.4. Кривата **1** се отнася за случая, когато махалото е окачено на призма $\mathbf{A_1}$, а кривата **2** - когато махалото е окачено на призма $\mathbf{A_2}$. Абсцисите $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ на пресечните точки на двете криви показват онези положения на вътрешната тежест $\mathbf{M_1}$, при които махалото става обръщаемо. Ординатите на тези точки дават периода на реверсионното махало



Фиг. 4

$$\mathbf{T = T_1 = T_2}$$

При графичното определяне на дадена величина се допуска по-голяма грешка, отколкото при нейното директно измерване. Ето защо вътрешната тежест $\mathbf{M_1}$ се поставя в едно от положенията $\mathbf{x_1}$ или $\mathbf{x_2}$ определени от графиката и се проверява дали $\mathbf{T_1}$ е равно на $\mathbf{T_2}$. Ако няма пълно съвпадение се взема средно аритметичната стойност. Със стойността получена за периода се замества във формула (9), в която $\mathbf{l_0}$ е конструктивна константа определена с точност **0.001 m** и се пресмята стойността на земното ускорение.

Чрез логаритмуване и диференциране на формула (9) се получава относителната грешка

$$\frac{\Delta \mathbf{g}}{\mathbf{g}} = \pm\left(\frac{\Delta \mathbf{l}_0}{\mathbf{l}_0} + \frac{2\Delta \mathbf{T}}{\mathbf{T}}\right) \tag{10}$$

$\Delta \mathbf{l_0}$ - абсолютната грешка на $\mathbf{l_0}$

$\Delta \mathbf{T}$ - абсолютната грешка на **T**, зависеща от хронометъра.